الفضاءات المترية:

تعريف:

الفضاء المتري: هو مجموعة جزئية X ودالة مسافة d تقابل كل عنصرين $x,y \in X$ بعدد حقيقي نرمز له $d(x,y)$ بحيث تحقق الشروط التالية:

1) $d(x,y) \geq 0$ ، $d(x,y) = 0 \iff x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

أي من أجل أي ثلاث نقاط $X,Y,Z \in X$

ونرمز للفضاء المتري بالثنائية (X, d)

ملاحظات حول التعريف:

1. X مجموعة غير خالية $X \neq \phi$

2. المسافة $d(x,y)$ أي المسافة أو البعد بين النقطتين x, y

3. الشرط الثالث في التعريف يسمى متراجحة المثلث.

متراجحة المثلث: هي طول أي ضلع في مثلث لا يزيد عن طول مجموع الضلعين الآخرين.

4. رمزياً الدالة d يعبر عنها

$$d: X \times X \longrightarrow R$$
$$(x,y) \longrightarrow d(x,y)$$

وبعض المؤلفين ينسب للدالة d إلى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+

$$d: X \times X \longrightarrow R^+$$
$$(x,y) \longrightarrow d(x,y)$$

عندها لا داعي لكتابة $d(x,y) \geq 0$ ، $d(x,y) = 0 \iff x = y$

أمثلة:

مثال (1): لنأخذ مجموعة الأعداد الحقيقية R ونعرف الدالة d بالصيغة

$$d: R \times R \longrightarrow R$$
$$d(x,y) = |x - y|$$

لنتأكد أنها دالة مسافة ؛ $d(x,y) = |x-y| \geq 0$

الشرط محقق $\Leftarrow$ $|x-y| = 0 \iff x-y=0 \Rightarrow x=y$ [1]

[2] $d(x,y) = |x-y| = |(-1)(-x+y)| = |y-x| = d(y,x)$

[3] $d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y|$
$= d(x,z) + d(z,y)$

الشروط الثلاث محققة في دالة المسافة والفضاء المتري الحقيقي المألوف (المعروف) ونرمز له بالرمز R

مثال (2) :

لنأخذ المجموعة R^2 مجموعة الثنائيات من الشكل

$x = (x_1, x_2)$ ؛ $x_1, x_2 \in R$

ونفرض ان $d : R^2 \times R^2 \longrightarrow R$

$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$

ولنأخذ R^3 مجموعة الثلاثيات $x = (x_1, x_2, x_3)$ فالمسافة تعرف

$d : R \times R \longrightarrow R$

$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$
$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)}$

ولنأخذ الحالة العامة R^n وهي مجموعة المركبات من الشكل.

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $x_i \in R$; $i = 1, 2, \ldots, n$
$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$; $y_i \in R$; $i = 1, 2, \ldots, n$
$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$; $z_i \in R$; $i = 1, 2, \ldots, n$

ونعرف الدالة d $\quad d : R^n \times R^n \longrightarrow R$

$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$

$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ ... [1]

Subject Date

لنبرهن أن العلاقة (1) تمثل مسافة

شرط 1] $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=0 \Leftrightarrow \sum(x_i-y_i)^2=0$

مجموع الأعداد الموجبة يساوي الصفر ⟸

شرط $(x_i-y_i)^2=0 \; ; \; i=1,2,3,\dots,n \Rightarrow x_i=y_i \Rightarrow x=y$

شرط 2] $(x_i-y_i)^2=(y_i-x_i)^2$ محقق

شرط 3] $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ متراجحة المثلث في هذه الحالة

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2} \quad \text{--- (2)}$$

لنبرهن صحة العلاقة [2]

لسهولة الكتابة نفرض $x_i-z_i=a_i$

$z_i-y_i=b_i \Rightarrow a_i+b_i=x_i-y_i$

وتأخذ المتراجحة (2) الشكل:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i} \quad \text{--- [3]}$$

ومجموعة من الأعداد $a_1,a_2,\dots,a_n$ و $b_1,b_2,\dots,b_n$

لإثبات [3] نحتاج إلى متراجحة أخرى تسمى متراجحة كوشي

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i} \quad \text{--- [4]}$$

لإثبات [4] نشكل ثلاثي الحدود بالمتحول x مثل

ax^2+bx+c

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)x^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)x+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$

إذا كان الجذر موجب $ax^2+bx+c\geq0$

Subject | Date |

$$\Delta = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

نقسم المتراجحة على 4

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

وبجذر الطرفين

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)}$$

بالعودة إلى [3] نلاحظ أن

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

وباستخدام المتراجحة [4] من أجل الحد الثاني

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i}\right)^2$$

وبجذر الطرفين نحصل على [3]:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i}$$

فهذه الدالة دالة مسافة.

الفضاء الإقليدي:

d : هي المسافة الإقليدية على $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$: الفضاء الناتج المترى الإقليدي النوني الأبعاد

ملاحظة: يمكن أن نعرف أكثر من مسافة واحدة على المجموعة الواحدة أي أن المجموعة نفسها قد تصبح فضاءات مترية متعددة حسب المسافة المعرفة عليها

ونوضح على الأمثلة التالية:

مثال (1): لنأخذ R^n مجموعة الأعداد الحقيقية ونعرف الدالة d بالصيغة

$$d_1(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| + \dots + |x_n-y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i|$$

الحل: الشرطان 1 و 2 محققان ومعروفان.

3) $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i-z_i+z_i-y_i| \leq$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i-z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i-y_i| = d(x,z) + d(z,y).$$

وكما يمكن ان نعرف ان R^n في مسافة أخرى

$$d_2(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i-y_i|$$

مثال: ليكن لدينا (X,d) فضاء متري نعرف الدالة d'

$$d'(x,y) = n\,d(x,y) \;;\; n>0$$

وهي دالة مسافة.

انتهت المحاضرة الأولى..